(b) $y_n = y_0 - hf(x_{n-1}, y_{n-1})$

(c) $y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1})$

(d) None of these

खण्ड-'ब'

Section-'B'

(लघु उत्तरीय प्रश्न) 5×2=10

(Short Answer Type Questions)

नोट : सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न करना अनिवार्य है। प्रत्येक प्रश्न 2 अंकों का है।

Note : Attempt all the five questions. One question from each unit is compulsory. Each question carries 2 marks.

इकाई-I

Unit-I

2. सिद्ध कीजिये कि किसी सदिश समष्टि $V(F)$ के कोई दो उपसमष्टियों का सर्वनिष्ठ भी $V(F)$ की एक उपसमष्टि होती है।

Prove that the intersection of any two subspaces of a vector space $V(F)$ is also a subspace of $V(F)$.

अथवा

Or

दर्शाइये कि सदिश (2, 1, 4); (1, –1, 2); (3, 1, –2), $R^3(R)$ के लिए एक आधार निर्मित करते हैं।

Show that the vectors (2, 1, 4); (1, –1, 2) and (3, 1, –2) form a basis for $R^3(R)$.

इकाई-II

Unit-II

3. दर्शाइये कि किसी समाकारिता की अष्टि सदिश समष्टि $U(F)$ की एक सदिश उपसमष्टि होती है।

Show that the Kernel of a homomorphism is a subspace of $U(F)$.

अथवा

Or

आव्यूह A का आइगेन मान तथा आइगेन सदिश ज्ञात कीजिये—

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Find eigen value and corresponding Eigen vector of the matrix A :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

इकाई-III

Unit-III

4. यदि α और β किसी आन्तर गुणन समष्टि $V(F)$ के सदिश हैं, तब दर्शाइये कि—

$$\|\alpha+\beta\|^2 + \|\alpha-\beta\|^2 = 2\|\alpha\|^2 + 2\|\beta\|^2$$

If α, β are vector in an inner product space $V(F)$, prove that :

$$\|\alpha+\beta\|^2 + \|\alpha-\beta\|^2 = 2\|\alpha\|^2 + 2\|\beta\|^2$$

अथवा

Or

आन्तर-गुणन समष्टि को उदाहरण सहित समझाइये।

Define inner-product space with an example.

इकाई-IV

Unit-IV

5. समद्विभाजन विधि के प्रयोग से समीकरण $x^3 - x - 4 = 0$ का मूल ज्ञात कीजिये।

By using Bisection method find the root of the equation $x^3 - x - 4 = 0$.

अथवा

Or

न्यूटन-रैफसन विधि से $x^2 - 5x + 2 = 0$ का मूल ज्ञात कीजिये।

Find the root of $x^2 - 5x + 2 = 0$ by using Newton-Raphson method.

इकाई-V

Unit-V

6. गॉउस-जार्डन विधि से हल कीजिये—

$$10x+y+z=12$$

$$2x+10y+z=13$$

$$x+y+5z=7$$

Apply Gauss-Jordon method solve :

$$10x+y+z=12$$

$$2x+10y+z=13$$

$$x+y+5z=7$$

अथवा

Or

ऑयलर-विधि के द्वारा अवकल समीकरण का हल छः पदों में ज्ञात कीजिये—

$$\frac{dy}{dx}=x+y;\quad y(0)=0,\ h=0\cdot 2$$

Using Euler's method solve the differential equation in six steps ;

$$\frac{dy}{dx}=x+y;\quad y(0)=0,\ h=0\cdot 2$$

खण्ड-'स'

Section-'C'

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न) 5×5=25

(Long Answer Type Questions)

नोट : सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न करना अनिवार्य है। प्रत्येक प्रश्न 5 अंकों का है।

Note : Attempt all the five questions. One question from each unit is compulsory. Each question carries 5 marks.

इकाई-I

Unit-I

7. सदिश समष्टियों के लिए विमीय प्रमेय लिखिये एवं सिद्ध कीजिये।

State and prove dimension theorem for vector space.

अथवा

Or

यदि W एक परिमित विमीय सदिश $V(F)$ का एक उपसमष्टि है। तब सिद्ध करो कि—

$$\dim \frac{V}{W} = \dim V - \dim W$$

If W be a subspace of a finite dimensional vector space $V(F)$, then prove that :

$$\dim \frac{V}{W} = \dim V - \dim W$$

इकाई-II

Unit-II

8. सदिश समष्टि समाकारिता का मूलभूत प्रमेय का कथन लिखिये और सिद्ध कीजिये।

State and prove fundamental theorem of vector space homomorphism.

अथवा

Or

दर्शाइए कि आव्यूह A विकर्णनीय है—

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Show that the matrix A is diagonalizable :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

इकाई-III

Unit-III

9. कॉशी-स्वार्ज असमिका का कथन लिखिये एवं सिद्ध कीजिये।

State and prove Cauchy Schwartz Inequality.

अथवा

Or

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक परिमित-विमीय आन्तर गुणन समष्टि का एक प्रसामान्य लाम्बिक आधार होता है।

Prove that every finite dimensional inner product space has an orthonormal basis.

इकाई-IV

Unit-IV

10. न्यूटन अग्र-अन्तर्वेशन विधि द्वारा 1966 की बिक्री ज्ञात कीजिये—

वर्ष	1931	1941	1951	1961	1971	1981
बिक्री हजार में	12	15	20	27	39	52

Estimate the sale of 1966 using Newton's formula for forward interpolation :

Year	1931	1941	1951	1961	1971	1981
Sale in thousand	12	15	20	27	39	52

अथवा

Or

छः बराबर अन्तराल लेते हुए $\int_0^6 \frac{dx}{1+x^2}$ का मान सिम्पसन $\frac{3}{8}$ नियम से ज्ञात कीजिये।

Evaluate $\int_0^6 \frac{dx}{1+x^2}$ by is Simpson's $\frac{3}{8}$ rule of divided into 6 equal part.

इकाई-V

Unit-V

11. ऑयलर विधि के प्रयोग से अवकल समीकरण के $x = 1$ पर y के लिए पाँच चरणों में हल ज्ञात कीजिये—

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2; \quad y(0) = 1$$

Using Euler's method solve the differential equation for y at $x = 1$ in five steps :

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2; \quad y(0) = 1$$

अथवा

Or

चतुर्थ कोटि के रुंगे-कुट्टा विधि के प्रयोग से y ज्ञात कीजिये जब $x = 1{\cdot}1$ जबकि चरण $0{\cdot}1$ दिया गया है—

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2; \; y(1) = 1{\cdot}5$$

Use Runge-Kutta method of fourth order to find y when $x = 1{\cdot}1$ in steps of $0{\cdot}1$ given that :

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2; \; y(1) = 1{\cdot}5$$

Printed Pages – 15

165

G-814

B. Sc. (Third Year) Examination, 2021-22

MATHEMATICS

Paper : First

(Linear Algebra and Numerical Analysis)

Time Allowed : Three hours

Maximum Marks : 40

नोट : सभी तीनों खण्डों के प्रश्न निर्देशानुसार हल कीजिए। अंकों का विभाजन खण्डों के समक्ष दिया गया है।

*Note : Attempt questions of all **three** sections as directed. Distribution of marks is given against each section.*

खण्ड-'अ'

Section-'A'

(वस्तुनिष्ठ प्रश्न) **5×1=5**

(Objective Type Questions)

नोट : निम्नलिखित सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

Note : Attempt all the following questions. Each question carries 1 mark.

1. सही उत्तर का चयन कीजिए—

Choose the correct answer :

(i) सदिश α, β को रैखिकत: स्वतन्त्र कहते हैं यदि—

(a) $a\alpha + b\beta = 0$

(b) $a\alpha + b\beta \neq 0$

(c) $\alpha\beta + ab = 0$

(d) इनमें से कोई नहीं

The set of vectors α, β is called linearly independent if :

(a) $a\alpha + b\beta = 0$

(b) $a\alpha + b\beta \neq 0$

(c) $\alpha\beta + ab = 0$

(d) None of these

(ii) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$ के आइगेन मान है—

(a) ± 1

(b) $\pm\cos\theta$

(c) $\pm\sin\theta$

(d) $\cos\theta$, $\sin\theta$

Eigen value of $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$ are :

(a) ± 1

(b) $\pm\cos\theta$

(c) $\pm\sin\theta$

(d) $\cos\theta$, $\sin\theta$

(iii) एक आन्तर गुणन समष्टि में दो सदिश α और β रैखिकत: परतन्त्र है, यदि और केवल यदि—

(a) $\|\alpha + \beta\| = \|\alpha\| + \|\beta\|$

(b) $\|\alpha+\beta\| \leq \|\alpha\|+\|\beta\|$

(c) $\|\alpha+\beta\|^2 \leq \|\alpha\|^2+\|\beta\|^2$

(d) इनमें से कोई नहीं

Two vector α and β in an inner product space are orthogonal if and only if :

(a) $\|\alpha+\beta\| = \|\alpha\|+\|\beta\|$

(b) $\|\alpha+\beta\| \leq \|\alpha\|+\|\beta\|$

(c) $\|\alpha+\beta\|^2 \leq \|\alpha\|^2+\|\beta\|^2$

(d) None of these

(iv) समद्विभाजन विधि से बहुपद $x^3-4x-9=0$ का प्रथम सन्निकटन मान होगा—

(a) 3·5

(b) 2

(c) 2·5

(d) इनमें से कोई नहीं

The first approximation of the root of $x^3-4x-9=0$ using bisection method is :

(a) 3·5

(b) 2

(c) 2·5

(d) None of these

(v) ऑयलर विधि से y का nवाँ सन्निकटन $x = x_n = x_0 + nh$ पर है—

(a) $y_n = y_0 + hf(x_{n-1}, y_{n-1})$

(b) $y_n = y_0 - hf(x_{n-1}, y_{n-1})$

(c) $y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1})$

(d) इनमें से कोई नहीं

By Euler's method n^{th} approximate value of y at $x = x_n = x_0 + nh$ is :

(a) $y_n = y_0 + hf(x_{n-1}, y_{n-1})$